

**CALCULS INTEGRALES**

**Exercices d'applications et de réflexions**

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)

**TD : CALCULS INTEGRALES**

**Exercice1 :** Calculer les intégrales suivantes :

1)  $I = \int_2^4 3x dx$     2)  $J = \int_0^1 (2x+3) dx$

3)  $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt$     4)  $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$

**Exercice2 :** Calculer les intégrales suivantes :

1)  $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$     2)  $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$

3)  $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$     4)  $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$

5)  $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt$     6)  $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

7)  $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$     8)  $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

9)  $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$     10)  $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$

11)  $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$     12)  $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

13)  $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$     14)  $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$

15)  $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$     16)  $I_{16} = \int_0^1 \left( \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17)  $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$     18)  $I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$

19)  $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$     20)  $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$

21)  $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$

**Exercice3 :** Calculer les intégrales suivantes :

1)  $I = \int_0^3 |x-1| dx$     2)  $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

**Exercice4 :** on pose  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1) Calculer  $I+J$  et  $I-J$

2) en déduire  $I$  et  $J$

**Exercice5 :**

on pose :  $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$  et  $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$

1) Calculer  $I+J$  et  $I-3J$

2) en déduire  $I$  et  $J$

**Exercice6 :** Calculer les intégrales suivantes :

1)  $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$     2)  $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

3)  $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

**Exercice7 :** on pose :

$A = \int_1^e \left( \frac{1}{t} + \ln t \right) dt$  et  $B = \int_1^e \left( 1 + \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right) dt$

Calculer  $A+B$

**Exercice8 :** on pose :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$  et

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$

1) Calculer  $I+J$  et  $I-J$

2) en déduire  $I$  et  $J$

**Exercice9 :** on pose :  $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$  et

$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

1) Calculer  $K+L$  et  $K-L$

2) en déduire  $K$  et  $L$

**Exercice10 :** 1) vérifier que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$

2) Calculer l'intégrale suivante :  $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

**Exercice11 : 1)**verifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \quad \frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

2) Calculer l'intégrale suivante :  $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

**Exercice12 :**

Calculer l'intégrale suivante :  $I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

**Exercice13 :**

1) déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

2)en déduire l'intégrale suivante :  $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

**Exercice14 :** Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$$

**Exercice15 :** on pose :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1)montrer que :  $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ (linéarisation de } \cos^4 x \text{)}$$

2)en déduire l'intégrale  $I$

**Exercice16 :** Montrer les inégalités suivantes

1)  $\int_1^e \ln x dx \geq 0$                       2)  $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$

**Exercice17 :** Montrer que :  $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

**Exercice18 :** d'application Soit  $f : x \rightarrow e^{-x^2}$

Définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $a \geq 1$ , on s'intéresse à l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx$$

1)Démontrer que pour tout réel  $x \geq 1$  :

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

2) En déduire que pour tout réel  $a \geq 1$  :

$$0 \leq F(a) \leq e^{-1}.$$

**Exercice19 :** soit la suite numérique  $(u_n)$  définie

par :  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que  $(u_n)$  est croissante

2) Montrer que :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Exercice 20:** soit la suite numérique  $(u_n)$

définie par :  $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

2) En déduire:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{e^n} \right)$

**Exercice 21:** on considère la fonction numérique

définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Déterminer La valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; \ln 2]$

**Exercice 22:** Calculer les intégrales suivantes :

1)  $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$                       2)  $C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} dx$

**Exercice 23 :** Calculer l'intégrale suivante :

1)  $I = \int_0^\pi x \sin x dx$  2)  $J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$  3)  $K = \int_1^e \ln x dx$

**Exercice24 :** En utilisant une intégration par

partie calculer : 1)  $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$                       2)

$$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

3)  $K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx$                       3)  $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

4)  $M = \int_1^e (x \ln x) dx$                       5)  $N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$

**Exercice25 :** En utilisant une intégration par

partie calculer :

$$J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \quad K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

**Exercice26 :** On pose :  $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer  $I_0$

b) Calculer  $I_1$  en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite  $(I_n)_n$  est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

$$\text{montrer que : } \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite  $(I_n)_n$

**Exercice 27:**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé avec  $\|\vec{i}\| = 1cm$

Soit  $f$  définie sur  $[1;3]$  par :  $f(x) = 2x + 1$

1) vérifier que  $f$  est continue et positif sur  $[1;3]$

2) tracer  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  sur  $[1;3]$

3) calculer  $S$  la surface du domaine limité par :  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites :  $x = 1$  et  $x = 3$

4) calculer l'intégrale :  $I = \int_1^3 f(x) dx$

Que peut-on dire ?

**Exercice 28:**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x^2$$

1) tracer  $C_f$  la courbe représentative de  $f$

2) calculer  $S$  la surface du domaine limité par :  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites :  $x = 1$  et  $x = 2$

**Exercice 29:**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthogonale avec  $\|\vec{i}\| = 2cm$  et  $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit  $f$  définit par :  $f(x) = x^2 - 2x$

1) tracer  $C_f$  la courbe représentative de  $f$

2) calculer  $S$  la surface du domaine limité par :  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites :  $x = 1$  et  $x = 3$

**Exercice30 :**

$(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé avec  $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit  $f$  définit par :  $f(x) = 1 - e^x$

Calculer  $S$  la surface du domaine limité par :  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 2$  et  $x = \ln 4$

**Exercice 31:**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$  et Soit  $f$  définit par :  $f(x) = e^x - 3$

Calculer  $A$  la surface du domaine limité par :  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 3$  et  $x = \ln 6$

**Exercice 32:**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$  et Soit  $f$  définit par :  $f(x) = \ln x - 1$

Calculer  $A$  la surface du domaine limité par :  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$  et  $x = e$

**Exercice 33:**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé avec  $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en  $cm^2$   $S$  la surface du domaine limité par

$(C_f)$  ;  $(C_g)$  et les droites  $x = 0$  et  $x = \ln 2$

**Exercice34 :**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 0.5cm$  et Soit  $f$  définit par :  $f(x) = x^2 - 8x + 12$

et  $(D)$  la tangente à la courbe  $(C_f)$  au point

$A(3; f(3))$

Calculer  $A$  la surface du domaine limité par :

$(C_f)$  et les droites :  $(D)$  et  $x = 1$  et  $x = e$

**Exercice35 :**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 1cm$  et Soit  $f$  définit par :  $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Calculer  $A$  la surface du domaine limité par :

$C_f$  et les droites :  $y = x - 1$  et  $x = 1$  et  $x = e$

**Exercice36 :**  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  repère orthonormé

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que:  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$  et  $g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$  Calculer A la surface du domaine limité par :  $(C_f)$  ;  $(C_g)$  et les droites  $x=0$  et  $x=1$

**Exercice37 :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

- 1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  et vérifier qu'elle est strictement croissante.
- 2) Déterminer la surface  $S_1$  du domaine limité par l'axe  $(Ox)$  ; la courbe  $C_f$  et les droites:  $x = 0$  et  $x = 1$ .
- 3) Déterminer la surface  $S_2$  du domaine limité par la droite  $(\Delta) y = x$  ; la courbe  $C_f$  et les droites:  $x = 0$  et  $x = 1$ .

**Exercice38 :**  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé avec  $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en  $cm^3$  le volume du solide engendré par La rotation de la courbe  $C_f$  au tour de l'axe des abscisses entre  $a = 0$  et  $b = 4$

**Exercice39 :**  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé avec  $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$$
 et  $(C)$  la courbe de  $f$

Déterminer en  $cm^3$  le volume du solide engendré par La rotation de la courbe  $C_f$  au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle  $[0;1]$

**Exercice40:**  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé avec  $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et  $(C)$  la courbe de  $f$

Déterminer en  $cm^3$  le volume du solide engendré par La rotation de la courbe  $C_f$  au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle  $[1;e]$



*C'est en forgeant que l'on devient forgeron  
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et  
exercices*

*Que l'on devient un mathématicien*